

3039

B.Sc. (Part-III) Exam-2018

Mathematics

Paper: II

(Complex Analysis)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 75

Note: Attempt questions from all the sections.

सभी खण्डों से प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A

खण्ड-अ

(Short Answer Type Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any ten questions. Each question carries 3 marks. (3x10=30)

किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

1. If z_1 and z_2 are two complex numbers. Prove that

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

if and only if z_1, \bar{z}_2 is purely imaginary.

1133

3039-R-12000

यदि z_1 और z_2 दो काम्प्लेक्स संख्यायें हैं तो सिद्ध कीजिये

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

यदि और केवल यदि z_1, \bar{z}_2 पूर्ण काल्पनिक है।2. Verify the calculation that the values of $\frac{z}{z^2 + 1}$ for $z = x + iy$ and $z = x - iy$ are conjugate. $\frac{z}{z^2 + 1}$ के मान की गणना को जाँचिये यदि $z = x + iy$ और $z = x - iy$ कॉन्जुगेट है।

3. Define limit with suitable example.

उचित उदाहरण के साथ लिमिट को परिभाषित कीजिये।

1134

3039-R-12000

4. Prove that continuity is a necessary but not a sufficient condition for the existence of a finite derivative.

एक निश्चित अवकलित के अस्तित्व के लिये सिद्ध कीजिये कि संततता आवश्यक है लेकिन पर्याप्त शर्त नहीं है।

5. Find the analytic function of which the real part is

$$e^{-x}\{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}.$$

विश्लेषक फलन ज्ञात कीजिये जिसका वास्तविक हिस्सा $e^{-x}\{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}$ हो।

6. State and prove Cauchy's theorem.

कॉची प्रमेय का कथन लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

7. Define Harmonic function with suitable example.

उचित उदाहरण के साथ हारमोनिक फलन को समझाइये।

1135

3039-R-12000

8. State and prove Morera's theorem.

मोरेरा प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

9. State and prove Taylor's theorem (for expansion of analytic function as power series).

टेलर प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये (विश्लेषक फलन के पावर श्रेणी के विस्तार के बारे में)।

10. State and prove Liouville's theorem.

लिऑवली प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

11. State and prove Laurent's theorem.

लारेन्ट प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

1136

3039-R-12000
UPadda.com

12. Prove that the transformation:

$$w = i \frac{(z-i)}{(z+i)}$$

maps the upper half of the z -plane into the interior of the unit circle in the w -plane.

ट्रॉसफोरमेशन को सिद्ध कीजिये:

$$w = i \frac{(z-i)}{(z+i)}$$

यूनिट वृत्त w -plane के आन्तरिक भाग के ऊपरी अर्धवृत्त z -plane को आच्छादित करता है।

13. Define power series as an analytic function.

पावर सीरीज को एक विश्लेषक फलन के रूप में परिभाषित कीजिये।

14. Define Complex integration with suitable example.

उचित उदाहरण के साथ कॉम्प्लेक्स इन्टीग्रेशन को समझाइये।

15. Define line integral with suitable example.

लाइन इन्टीग्रल को उचित उदाहरण के साथ समझाइये।

Section-B

खण्ड-ब

(Long Answer Type Questions)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any three questions. Each question carries 15 marks. (15x3=45)

किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंकों का है।

1. State and prove Residue theorem.

अवशेष प्रमेय को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

2. State and prove the necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be analytic.

$f(z)$ को एक विश्लेषक के लिये जरूरी तथा पूर्ण शर्तों को लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

1137

1138

3. By using the integral representation of $f^n(0)$.

$$\text{Prove that: } \left| \frac{x^n}{n!} \right|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_c x^n \frac{e^{xz}}{n!z^{n+1}} dz$$

where c is any closed contour surrounding the origin hence. Show that

$$\sum \left| \frac{x^n}{n!} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x \cos\theta} d\theta$$

$f^n(0)$ समाकलनीय प्रस्तुतीकरण का प्रयोग कर सिद्ध

$$\text{कीजिये कि } \left| \frac{x^n}{n!} \right|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_c x^n \frac{e^{xz}}{n!z^{n+1}} dz$$

जहाँ c कोई बन्द कॉन्टूर मूलबिन्दु को घेरे हुए हैं। इसलिये

$$\text{सिद्ध कीजिये कि } \sum \left| \frac{x^n}{n!} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x \cos\theta} d\theta$$

4. Describe conformal mapping with suitable examples.

कन्फॉर्मल मैपिंग को उदाहरण सहित विस्तार से समझाइये।

5. State and prove Cauchy's Integral formula.

कॉची के समाकलन का सूत्र लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

1139