

B.Sc. (Part-II) Exam-2018

Mathematics

Paper: III

(Mechanics)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 50

Note: Attempt questions from all the sections.

नोट: सभी खण्डों से प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A

खण्ड-अ

(Short Answer Type Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any ten questions. Each question carries 2 marks. (2x10=20)

नोट: किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1. A particle describes a curve (for which s and ψ vanish simultaneously) with uniform speed v . If the acceleration at any point s be $\frac{v^2 c}{(s^2 + c^2)}$. Find the intrinsic equation of the curve.

641

एक कण v एक समान वेग से एक वक्र (जिसके लिये s व ψ गायब हो जाते हैं) पर गतिमान है। यदि किसी बिन्दु s

पर $\frac{v^2 c}{(s^2 + c^2)}$ त्वरण हों, तो वक्र के आन्तरिक समीकरण को ज्ञात कीजिये।

2. A small bead slides with constant speed v on a smooth wire in the shape of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

Show that the angular velocity is $(v/2a)\sec\frac{1}{2}\theta$.

एक मनका, कार्डिआइड $r = a(1 + \cos \theta)$ के आकार के चिकने तार पर अचर वेग v से फिसलता है सिद्ध कीजिये

कि कोणीय वेग $(v/2a)\sec\frac{1}{2}\theta$ होता है।

3. A point moving in a straight line with S.H.M. has velocities v_1 and v_2 when its distances from the centre are x_1 and x_2 . Show that the period of motion is

$$2\pi \sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{(v_2^2 - v_1^2)}}$$

642

एक कण सरल आवर्त गति के साथ एक सीधी रेखा में गतिमान है तथा इसके वेग v_1 और v_2 हैं जब केन्द्र से दूरियां x_1 और x_2 होती हैं सिद्ध कीजिये उसकी गति का आवर्त होगा

$$2\pi \sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{(v_2^2 - v_1^2)}}$$

4. A particle describes the curve $r^n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ under a force to the pole. Find the law of force.

एक कण, वक्र $r^n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ एक बल के अन्तर्गत गतिमान है, बल के नियम को ज्ञात कीजिये।

5. A particle moves in a plane with an acceleration which is always directed to a fixed point O in the plane. Find the path of differential equation.

एक कण, एक समतल में उस त्वरण के साथ गति करता है जो उसी समतल में एक स्थिर बिन्दु O की तरफ सदैव लगा हुआ है, उस पथ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

643

2040-R-19500

6. A particle of mass m is projected vertically under the gravity, the resistance of the air being 'mk' times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is

$$\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$$

where V is the terminal velocity of the particle and λV is the initial vertical velocity.

m द्रव्यमान का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत, उर्ध्वाधर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है, हवा का प्रतिरोध चाल से 'mk' गुना है सिद्ध कीजिये कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई होगी।

$$\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$$

जहाँ V कण की टर्मिनल वेग है और λV प्रारम्भिक उर्ध्वाधर वेग है।

644

7. Find the centre of gravity of the whole arc of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$

कार्डायड $r = a(1 + \cos \theta)$ के पूरे चाप का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिये।

8. Find the centre of gravity of the solid formed by the revolution at the axis of x and the latus rectum of the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$.

परवलय $y^2 = 4ax$, x अक्ष और नाभिलम्ब से घिरे क्षेत्रफल को नाभिलम्ब के सापेक्ष घुमाने पर प्राप्त ठोस का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिये।

9. A telegraph wire is stretched between two poles at a distance 'a' metres a part sags 'n' metres in the middle; prove that the tension at the end is approximately

$$W \left[\frac{a^2}{8n} + \frac{7}{6}n \right]$$

645

UPadda.com

UPadda.com

एक टेलीग्राफ तार दो खम्भों के बीच खींच कर बंधा हुआ है खम्भों के बीच की दूरी a मीटर है तथा मध्य में तार के बीच गहराई n है, सिद्ध कीजिये कि सिरों पर तनाव लगभग

$$W \left[\frac{a^2}{8n} + \frac{7}{6}n \right] \text{ के बराबर होगा।}$$

10. Two Weights W_1, W_2 are fastened to a light inextensible string ABC at the points B, C the end A being fixed. Prove that, if a horizontal force P is applied at C and in equilibrium AB, BC are inclined at angle ϕ, θ to the vertical, then

$$P = W_2 \tan \theta, P = (W_1 + W_2) \tan \phi$$

दो भार W_1, W_2 , एक हल्की अविस्तार्य डोरी ABC से B, C बिन्दु पर जकड़े हुए हैं, एक सिरा A स्थिर है यदि एक क्षैतिज बल P बिन्दु पर लगाया जाये और संतुलन की स्थिति में, AB, BC उर्ध्वाधर के साथ ϕ, θ कोण बनाते हों तो सिद्ध कीजिये

$$P = W_2 \tan \theta, P = (W_1 + W_2) \tan \phi$$

646

UPadda.com

UPadda.com

11. A smooth ellipse is fixed with its axis vertical and in it is placed a beam with its ends resting on the arc of the ellipse, if the length of the beam but not less than the latus rectum of the ellipse, show that when it is in stable equilibrium, it pass through the focus.

एक चिकना दीर्घवृत्त अपने अक्ष को उर्ध्वाधर में रखकर टिका हुआ है उसके अन्दर एक छड़ जिसके दोनों सिरों, दीर्घवृत्त के चाप पर रखे हुए हैं, यदि छड़ की लम्बाई, जिसकी लम्बाई दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब की लम्बाई से कम नहीं है, दिखाइये कि जब यह स्थिर संतुलन में है, इसके फोकस से होकर जायेगी।

12. A solid hemisphere rests on a plane inclined to the horizon at an angle. $\alpha = \sin^{-1}(3/8)$ and the plane is rough enough to prevent any sliding. Find the position of equilibrium and show that it is stable.

क्षैतिज के साथ $\alpha = \sin^{-1}(3/8)$ कोण बनाता हुआ एक झुके समतल पर एक ठोस अर्धगोला रखा हुआ है और समतल किसी प्रकार की फिसलन रोकने के लिए पर्याप्त खुरदुरा है, साम्यावस्था की स्थिति ज्ञात कीजिए और बताइये कि ये स्थिति स्थिर अवस्था की है।

647

13. A heavy bead, of mass m , slides on a smooth wire in the shape of a cycloid, whose axis is vertical and vertex upwards, in a medium whose resistance is $mv^2/2c$ and the distance of starting point from the vertex is c . Show that the time of descent to the cusp is $\sqrt{\frac{8a(4a-c)}{gc}}$, where $2a$ is the length of the axis of the cycloid.

m द्रव्यमान का एक भारी मनका, एक चक्रज के आकार के चिकने तार पर खिसकता है जिसका अक्ष उर्ध्वाधर है तथा शीर्ष लम्बवत् है जिस माध्यम में चक्रज है उसका प्रतिरोध $mv^2/2c$ है और शीर्ष की प्रारम्भिक बिन्दु से दूरी c है। सिद्ध कीजिये कि शीर्ष की ओर गिरने में लगा समय

$\sqrt{\frac{8a(4a-c)}{gc}}$ है, जहाँ $2a$ चक्रज के अक्ष की लम्बाई है।

14. A particle is placed on the outside of a smooth vertical circle. If the particle starts from a point whose angular distance is α from the highest point of the circle, show that it will fly off the curve when

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha$$

648

एक कण, एक चिकने उर्ध्वाधर वृत्त की बाहरी तरफ रखा हुआ है यदि कण एक बिन्दु से गतिमान होता है जिसकी कोणीय दूरी, वृत्त के उच्चतम बिन्दु से α है, सिद्ध कीजिये कि कण वक्र पर लुड़केगा जबकि

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \cos\alpha$$

15. If the determinant at any point P of a catenary meets the directrix at Q, show that PQ=P.

कैटेनरी के किसी बिन्दु P पर लम्ब Q बिन्दु पर नियता से मिलता है। सिद्ध कीजिये कि PQ=P

Section-B

खण्ड-ब

(Long Answer Type Questions)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any two questions. Each question carries 15 marks. (15x2=30)

नोट: किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंकों का है।

649

1. A heavy elastic string, whose natural length is $2\pi l$, is placed round a smooth cone whose axis is vertical and whose semi-vertical angle is θ . If W be the weight and λ the modulus of elasticity of the string, prove that it will be in equilibrium when in the form of a circle whose radius is $l \left[1 + \frac{W}{2\lambda\pi \tan\theta} \right]$

एक भारी प्रत्यास्थ डोरी जिसकी प्राकृतिक लम्बाई $2\pi l$ है जो कि एक चिकने शंकु के चारों ओर लगी हुई है जिसका अक्ष अर्ध उर्ध्वाधर है तथा जिसका उर्ध्वाधर कोण θ है यदि डोरी का भार W हो तथा प्रत्यास्थता गुणांक λ हो तो सिद्ध कीजिये कि ये साम्यावस्था में होगी जब ये वृत्त के आकार की होगी जिसकी त्रिज्या $l \left[1 + \frac{W}{2\lambda\pi \tan\theta} \right]$ होगी।

2. A uniform chain, of the length a and weight W, hangs between two fixed points at the same level and a weight W' is attached at the middle point. If c be the sag in the middle, prove that the pull on either point of support is $\frac{1}{8} \frac{Wa}{c} + \frac{c}{2a} W + \frac{a}{4c} W'$

650

एक समांगी डोरी जिसकी लम्बाई a है तथा भार W है दो स्थिर बिन्दुओं के बीच में लटकी हुई है, बिन्दु एकसमान स्तर पर हैं मध्यबिन्दु पर एक भार W' लगा हुआ है यदि मध्य में c जितना डुबाव (गहराई) है। सिद्ध कीजिये कि किसी भी संतुलन के बिन्दु पर खिंचाव

$$\frac{1}{8} \frac{Wa}{c} + \frac{c}{2a} W + \frac{a}{4c} W' \text{ होगा।}$$

3. A particle is free to move a smooth vertical circular wire of radius r . It is projected from the lowest point with velocity just sufficient to carry it to the highest point. Show that the reaction between the particle and the wire is zero after a time.

$$\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right) \log[\sqrt{6} + \sqrt{5}]}$$

एक कण, एक वृत्ताकार तार r चिकने उर्ध्वाधर तार पर गति करने को स्वतन्त्र है यदि इसे निम्नतम बिन्दु से उतने ही पर्याप्त वेग से प्रक्षेपित किया जाता है कि उच्चतम बिन्दु पर कण पहुंच जाये, सिद्ध कीजिये कि एक समय

$\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right) \log[\sqrt{6} + \sqrt{5}]}$ के बाद, जहाँ तार और कण के बीच की प्रतिक्रिया शून्य हो जाये।

651

4. A particle, projected with a velocity u , is acted on by a force which produces a constant acceleration f in the plane of motion inclined at a constant angle α with the direction of motion. Obtain the intrinsic equation of the curve described, and show that the particle will be moving in the opposite direction to that of projection at time $\frac{u}{f \cos \alpha} \left[e^{\pi \cot \alpha} - 1 \right]$.

एक कण u वेग से प्रक्षेपित किया जाता है जिस पर एक बल कार्य करता है जो एक अचर त्वरण उत्पन्न करता है, गति के उस समतल में, जो कि गति की दिशा में एक अचर कोण α पर झुका हुआ है, गति के द्वारा रचित वक्र के आन्तरिक समीकरण को ज्ञात कीजिये और ये भी सिद्ध कीजिये कि कण $\frac{u}{f \cos \alpha} \left[e^{\pi \cot \alpha} - 1 \right]$ समय पर उस प्रक्षेपण की विपरीत दिशा में गति करने लगेगा।

652