

Note : Attempt all Sections.

सभी खण्ड हल कीजिए।

खण्ड—अ (Section – A)

Note : All questions are compulsory. Every question carries equal marks.

सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

1. The projection of vector $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ is :

सदिश $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का प्रक्षेप सदिश $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर होगा :

- (अ) $\frac{1}{9}$ (ब) $\frac{19}{9}$ (स) $\frac{2}{9}$ (द) इनमें से कोई नहीं

2. A particle moves along a curve whose parametric equations are $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos 3t$, $z = 2 \sin 3t$, where t is time. The magnitude of velocity at $t = 0$ is :

एक कण वक्र, जिसकी प्राचलिक समीकरण $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos 3t$, $z = 2 \sin 3t$ पर घूमता है, जहाँ t समय है। वेग का परिमाण $t = 0$ पर है :

- (अ) $\sqrt{31}$ (ब) $\sqrt{35}$ (स) $\sqrt{37}$ (द) इनमें से कोई नहीं

3. The magnitude of maximum directional derivative of $\phi = x^2 yz^3$ at point $(2, 1, -1)$ is :

फलन $\phi = x^2 yz^3$ के अधिकतम दिक् अवकलज का परिमाण बिन्दु $(2, 1, -1)$ पर होगा।

- (अ) $4\sqrt{11}$ (ब) $\sqrt{11}$ (स) $2\sqrt{11}$ (द) इनमें से कोई नहीं

4. If \vec{A} represents a conservative field, then the value of $\text{curl } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ is :

यदि \vec{A} संरक्षी क्षेत्र को दर्शाता है, तब $\text{curl } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ का मान है।

- (अ) 1 (ब) \hat{i} (स) $\vec{0}$ (द) इनमें से कोई नहीं

5. The coordinates of the centre of the circle $r = A \cos \theta + B \sin \theta$ is :

वृत्त $r = A \cos \theta + B \sin \theta$ के केन्द्र के निर्देशांक हैं :

- (अ) $\left(\sqrt{A^2 + B^2}, \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) \right)$ (ब) $\left(\sqrt{A^2 - B^2}, \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \right)$
(स) $\left(A + B, \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) \right)$ (द) इनमें से कोई नहीं

6. A conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents an ellipse, a parabola or a hyperbola according as :

- (अ) $h^2 - ab \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0$ (ब) $h^2 - ab \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} = 0$
(स) $h^2 - ab \begin{cases} = \\ < \\ > \end{cases}$ (द) इनमें से कोई नहीं

7. The intercept form of plane is :

किसी समतल का अंतः खण्ड का रूप होगा :

(अ) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(ब) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$

(स) $ax + by + cz = 1$

(द) इनमें से कोई नहीं

8. The condition for the line :

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

is parallel to plane $ax + by + cz + d = 0$ is [when the point (x_1, y_1, z_1) does not lie on the plane] :

रेखा $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ के समतल $ax + by + cz + d = 0$ के समानान्तर होने की शर्त है [जबकि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) समतल पर नहीं है] :

(अ) $al + bm + cn = 0, ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$

(ब) $al + bm + cn = 1, ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$

(स) $al + bm + cn = 0, ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$

(द) इनमें से कोई नहीं

9. The centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ is :

गोले, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या हैं :

(अ) $(1, -2, 3)$ व 5

(ब) $(1, 2, 3)$ व 4

(स) $(-1, 2, 3)$ व $\sqrt{5}$

(द) इनमें से कोई नहीं

10. The plane section of a sphere is :

किसी गोले का समतल खण्ड होता है :

(अ) परवलय

(ब) वृत्त

(स) अतिपरवलय

(द) इनमें से कोई नहीं

खण्ड—ब (Section - B)

Note : Attempt any eight questions. Each question carries equal marks.

कोई आठ प्रश्न हल करो। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

1. Prove :

सिद्ध कीजिए :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})^2$$

2. Prove

सिद्ध कीजिए :

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B})$$

3. Find the constants a, b and c so that vector :

$$\vec{A} = (x + 2y + az) \hat{i} + (bx - 3y - z) \hat{j} + (4x + cy + 2z) \hat{k} \text{ is irrotational.}$$

सदिश $\vec{A} = (x + 2y + az) \hat{i} + (bx - 3y - z) \hat{j} + (4x + cy + 2z) \hat{k}$ के अघूर्णी होने पर अचरों a, b व c का मान निकालिये।

4. Use Stokes theorem to evaluate $\int_S \text{curl } \vec{A} \cdot \hat{n} dS$ over open hemi-spherical

surface $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$, where $\vec{A} = y \hat{i} + zx \hat{j} + y \hat{k}$.

स्टोक प्रमेय का प्रयोग करते हुए $\int_S \text{curl } \vec{A} \cdot \hat{n} dS$ का मान ज्ञात कीजिये, जबकि S अर्ध-गोले की सतह $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$ है; $\vec{A} = y \hat{i} + zx \hat{j} + y \hat{k}$

5. If PSQ and PHR be two chords of an ellipse through the foci S and H ; prove that $\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$ is independent of the position of P .

यदि PSQ और PHR दीर्घवृत्त की जीवा हो जो बिन्दु S और H से गुजरती हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$ बिन्दु P की स्थिति से स्वतंत्र होगा।

6. Find the coordinates of the centre of the conic represented by general equation.

शांकव, जो कि व्यापक समीकरण द्वारा प्रदर्शित होता है, के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।

7. Prove that : $\nabla^2 (r^n) = n(n+1)r^{n-2}$, where n is constant.

सिद्ध कीजिये : $\nabla^2 (r^n) = n(n+1)r^{n-2}$, जहाँ n स्थिरांक है।

8. Find the equation of the plane passing the line of intersection of the planes $2x - 7y + 4z = 3$, $3x - 5y + 4z = -11$ and the point $(-2, 1, 3)$.

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो दो समतलों $2x - 7y + 4z = 3$, $3x - 5y + 4z = -11$ की प्रतिच्छेदन रेखा से गुजरती है और बिन्दु $(-2, 1, 3)$ से भी गुजरती है।

9. Find the coordinates of the foot of perpendicular drawn from origin to plane $3x + 4y - 6z + 1 = 0$. Find also the coordinates of the point on the line which is at the same distance from the foot of the perpendicular as the origin is :

मूलबिन्दु से समतल $3x + 4y - 6z + 1 = 0$ पर डाले गये लम्ब के पाद का निर्देशांक ज्ञात कीजिये। मूलबिन्दु और पाद को बढ़ाने वाली रेखा पर उस बिन्दु के निर्देशांक भी निकालिये जिसकी दूरी पाद से वही है जितनी मूलबिन्दु की पाद से।

10. A circle $(2, 3, 0)$ and radius 1, is drawn in the plane $z = 0$. Find the equation of the sphere which passes through this circle and the point $(1, 1, 1)$.

एक वृत्त, जिसका केन्द्र $(2, 3, 0)$ और त्रिज्या 1 है, समतल $z = 0$ में बनाया गया है उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये जो इस वृत्त और बिन्दु $(1, 1, 1)$ से गुजरता है।

11. Find the equation of a sphere which passes through the origin and intercepting length are a, b and c on the x, y and z -axes respectively.

उस गोले का समीकरण ज्ञात करिये जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा x, y, z अक्षों पर कटे हुये अंतः खण्डों की लम्बाई क्रमशः a, b व c है। <http://www.upadda.com>

12. Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to the $x = \frac{y}{2} = -z$ and whose guiding curve is $3x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$.

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके लिये जनक रेखा $x = \frac{y}{2} = -z$ और आधार वक्र $3x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ है।

खण्ड—स (Section - C)

Note : Attempt any two questions. Every question carries equal marks.

कोई दो प्रश्न हल करो। प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं।

1. Trace the conic $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$. Find the equations of its axes and asymptotes.

शांकव $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ का अनुरेखण करिये तथा अक्षों एवं अन्त स्पर्शों का समीकरण भी ज्ञात करिये।

2. (a) Evaluate $\iint_S \bar{A} \cdot \hat{n} dS$, where $\bar{A} = 18z\hat{i} - 12y\hat{j} + 3y\hat{k}$ and S is that

part of the plane $2x + 3y + 6z = 12$ which is located in the first octant.

$\iint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$ का मान ज्ञात कीजिये, जहाँ $\vec{A} = 18z \hat{i} - 12y \hat{j} + 3y \hat{k}$ और S समतल $2x + 3y + 6z = 12$ का वह भाग है जो प्रथम अष्टांशक का भाग है।

(b) Using Gauss theorem, show that :

$$\iint_S [(x^3 - yz) \hat{i} - 2x^2 y \hat{j} + 2z \hat{k}] \cdot \hat{n} dS = \frac{a^5}{3}$$

where S is denotes the surface, of the cube bounded by planes $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$.

गाँस प्रमेय को प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिये :

$$\iint_S [(x^3 - yz) \hat{i} - 2x^2 y \hat{j} + 2z \hat{k}] \cdot \hat{n} dS = \frac{a^5}{3}$$

जहाँ S सन्दर्भित है घन के धरातल से, जो धरातल

$$x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$$

3. (a) Find the shortest distance between the lines :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}; \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

Hence show that the lines are coplanar.

रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}; \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ के बीच की न्यूनतम दूरी निकालिये और सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ एक ही समतल पर होंगी।

(b) Find the equations of spheres which pass through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5, x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y = 15$.

गोलों का समीकरण ज्ञात कीजिये जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5, x + 2y + 3z = 3$ से गुजरते हैं और समतल $4x + 3y = 15$ को स्पर्श करते हैं।

4. (a) Find the equation of surface generated by a straight line which is parallel to the line $y = mx, z = nx$ and intersects the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0.$$

उस सतह का समीकरण ज्ञात कीजिये जो उन रेखाओं से बनाती है जो रेखा $y = mx, z = nx$ के समानान्तर है तथा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ को प्रतिच्छेदित करती है।

(b) Find the equation of cone whose vertex is the point (α, β, γ) and base the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$.

उस शंकु का समीकरण निकालिये जिसका शीर्ष (α, β, γ) है और आधार वक्र शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$ है।