

1040

B.Sc.(Part-I) Examination-2018
Mathematics
Paper-III
(Geometry and vector Calculus)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 50

Note: Attempt questions from all the sections.
सभी खण्डों से प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A
खण्ड-अ
(Short Answer Type Questions)
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any ten questions. Each question carries 2 marks.
(2x10=20)

किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

- In a conic, prove that, the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.
सिद्ध करो कि शांकव में, कोई दो लम्बवत् नाभीय जीवाओं की लम्बाइयों के व्युक्तमों का योग अचर होता है।

1040-S-20500

2

- Prove that the condition that the line $l/r = A \cos\theta + B \sin\theta$ may touch the conic $l/r = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ is

$$A^2 + B^2 - 2e(A \cos \alpha + B \sin \alpha) + e^2 - 1 = 0$$

सिद्ध करो कि रेखा $l/r = A \cos\theta + B \sin\theta$ के, शांकव $l/r = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ को स्पर्श करने की शर्त $A^2 + B^2 - 2e(A \cos \alpha + B \sin \alpha) + e^2 - 1 = 0$ है।

- Find the equation of the plane through the points $(1, -2, 2), (-3, 1, -2)$ and perpendicular to the plane $x + 2y - 3z = 5$.

ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात करो जो कि बिन्दुओं $(1, -2, 2)$ व $(-3, 1, -2)$ से गुज़रता है तथा समतल $x + 2y - 3z = 5$ के लम्बवत् है।

- Find the image of the point $(1, 3, 4)$ in the plane $2x - y + z = 8$.

बिन्दु $(1, 3, 4)$ का समतल $2x - y + z = 8$ में प्रतिबिम्ब बिन्दु ज्ञात करो।

- Find the equation of a sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$, is a great circle.

1040-S-20500

ऐसे गोले का समीकरण ज्ञात करो जिसका वृहत्त (great circle) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ है।

6. Prove that the equation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,$$

represents a cone, if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$

सिद्ध करो कि:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0, \text{ शंकु को}$$

$$\text{प्रदर्शित करेगी यदि } \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d.$$

7. Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to the line $x = \frac{y}{z} = -z$ and guiding curve is

$$3x^2 + 2y^2 = 1, z = 0.$$

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ, रेखा $x = \frac{y}{z} = -z$ के समानान्तर हैं तथा गाइडिंग वक्र $3x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ है।

8. Find the equation to the tangent planes to the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ which are parallel to the plane}$$

$$lx + my + nz = 0.$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के उन स्पर्श समतलों का समीकरण ज्ञात करो जो कि समतल $lx + my + nz = 0$ के समानान्तर हैं।

9. If r is a unit vector, then prove:

यदि r एक इकाई सदिश हो तो सिद्ध करो:

$$\left| r \times \frac{dr}{dt} \right| = \left| \frac{dr}{dt} \right|$$

10. If $r(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$, Prove that:

यदि $r(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ सिद्ध करो कि:

$$2 \left(\int_1^2 r \times \frac{d^2 r}{dt^2} dt \right) = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

11. The necessary and sufficient condition for a vector point function ' \vec{a} ', to be of constant magnitude is:

$$\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

किसी सदिश बिन्दु फलन ' \vec{a} ' के अचर परिणाम होने की आवश्यकता व पर्याप्त शर्त है।

$$\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

12. Prove that $\operatorname{div} \operatorname{Curl} A = 0$

सिद्ध करो कि $\operatorname{div} \operatorname{Curl} A = 0$

13. If: $\vec{F} = ax \hat{i} + by \hat{j} + cz \hat{k}$, a, b, c are constants then evaluate $\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS$, where S is the surface of a unit sphere (By using Gauss's Divergence Theorem).

यदि $\vec{F} = ax \hat{i} + by \hat{j} + cz \hat{k}$ व a, b, c अचर हैं तब गौस डाइवर्जेंस प्रमेय का प्रयोग करते हुए $\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S इकाई त्रिज्ञा का एक गोला है।

14. Evaluate by Green's Theorem:

$\iint_C (\cos x \sin y - xy) dx + \sin x \cos y dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

ग्रीन प्रमेय की सहायता से.

$$\iint_C (\cos x \sin y - xy) dx + \sin x \cos y dy$$
 का ज्ञान करो, जहाँ C एक वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

$$c$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$15. \operatorname{Prove}: \nabla^2 f(|r|) = f''(|r|) + \frac{2}{|r|} f'(|r|)$$

$$\text{सिद्ध करो: } \nabla^2 f(|r|) = f''(|r|) + \frac{2}{|r|} f'(|r|)$$

Section-B खण्ड-ब

(Long Answer Type Questions)
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Note: Attempt any two questions. Each question carries 15 marks.
(15x2=30)
किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंकों का है।

1. Trace the curve:

वक्र का चित्रण कीजिए।

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$$

2. Verify Stoke's Theorem for $\vec{F} = -y^3 \hat{i} + x^3 \hat{j}$, where S is the circular disc $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$.

$\vec{f} = -y^3\hat{i} + x^3\hat{j}$ के लिए स्टोक प्रमेय का सत्यापन
कीजिए। जहाँ S circular disc $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ है।

- (a) Prove that the axis of the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by the plane $lx + my + nz = 0$ i.e., on the cone.

$$\frac{(b-c)l}{x} + \frac{(c-a)m}{y} + \frac{(a-b)n}{z} = 0$$

सिद्ध करो कि कॉनीकोइड $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का समतल $lx + my + nz = 0$ से प्राप्त section की अक्षें राष्ट्र

$$\frac{(b-c)l}{x} + \frac{(c-a)m}{y} + \frac{(a-b)n}{z} = 0$$

स्थित हैं।

- (b) Find the equations of the generators of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, which pass through the point $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ की उन जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दु $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$ से गुजरते हैं।

4. (a) Find the equation of the sphere that passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0$ $3x - 4y + 5z - 15 = 0$ and cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$, orthogonally.

उस गोले का समीकरण ज्ञात करो जो कि वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0$, $3x - 4y + 5z - 15 = 0$ से गुजरता है तथा गोला $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$ को ओरथोगोनल काटता है।

- (b) Find the equation to the right circular cylinder of radius 3 and axis as:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{1}$$

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 3 है व अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{5-z}{1}$.