

B.Sc. I – Mathematics (First Paper), 2005
(Algebra, Matrices and Trigonometry)

Note : (i) Attempt all Sections. (ii) All questions of Section A are compulsory.
(iii) Attempt any eight questions from Section B and two questions from section C.

खण्ड—अ (Section – A)

1. In a group number of identity elements is :

किसी समूह में तत्समकों की संख्या होती है :

- (अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4

2. If a is an element of a group G , then $(a^{-1})^{-1} = \dots$:

यदि a किसी समूह G का अवयव है, तब $(a^{-1})^{-1} = \dots$:

- (अ) c (ब) a (स) a^{-1} (द) इनमें से कोई नहीं

3. A non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow$:

किसी समूह G का कोई अतिरिक्त उपसमुच्चय H उसका उपसमूह तब और केवल तभी होगा जबकि $a, b \in H \Rightarrow$:

- (अ) $ab^{-1} \in H$ (ब) $a^{-1}b^{-1} \notin H$ (स) $b^{-1}a^{-1} \notin H$ (द) $ab \notin H$

4. If $f: (R, +) \rightarrow (R^*, \cdot)$, where R is the set of real numbers and $R^* = R - \{0\}$ is a group homomorphism, then $f(0) = \dots$:

यदि $f: (R, +) \rightarrow (R^*, \cdot)$ जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और $R^* = R - \{0\}$, एक समूह समाकारिता है, तब $f(0) = \dots$:

- (अ) 0 (ब) -1 (स) 1 (द) 2

5. If G is the group $(Z, 0)$, where Z is the set of integers and $a \circ b = a + b + 1 \forall a, b \in Z$, then the identity element of G is :

यदि G समूह $(Z, 0)$ है, जहाँ Z पूर्णाकों का समुच्चय है और $a \circ b = a + b + 1$
 $\forall a, b \in Z$ तब G का तत्समक है :

- (अ) -1 (ब) 0 (स) 1 (द) 2

6. How many binary operations are there in a ring ?

किसी वलय में कितने बाइनरी ऑपरेशन होते हैं ?

- (अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4

7. Every diagonal element of a skew-symmetric matrix is :

विषम सममित आव्यूह का प्रत्येक विकर्ण अवयव होता है :

- (अ) इकाई (ब) शून्य (स) अशून्य (द) पूर्णतः काल्पनिक।

8. If A is a non-singular matrix of order n , then the rank of A is :

यदि किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह A का ऑर्डर n है, तब A की कोटि होगी :

- (अ) 1 (ब) 0 (स) n (द) n^2

9. The value of $e^{2\pi i}$ is :

$e^{2\pi i}$ का मान है :

- (अ) 1 (ब) 0 (स) i (द) -1

10. $\cosh x = :$

- (अ) $\cos ix$ (ब) $i \cos ix$ (स) $-i \cos ix$ (द) $-\cos ix$

खण्ड—ब (Section – B)

1. Show that the set of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by $a \circ b = \frac{ab}{2}$.

दिखाइये कि सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय $a \circ b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित मंक्रिया के साथ एक आबेली समूह बनाता है।

2. Prove that a group in which each element is its own inverse is an abelian group.

सिद्ध कीजिये कि समूह जिसमें प्रत्येक अवयव स्वयं का व्युत्क्रम है, आबेली समूह होता है।

3. Show that the set $mZ = \{ma \mid a \in Z\}$ is a subgroup of the group $(Z, +)$, where Z is the set of integers and m is a fixed integer.

दिखाइये कि समुच्चय $mZ = \{ma \mid a \in Z\}$ समूह $(Z, +)$ का एक उपसमूह है जहाँ Z पूर्णाकों का समुच्चय है और m एक निश्चित पूर्णांक है।

4. Show that the order of each element of a finite group is finite.

दिखाइये कि परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है।

5. If $f: G \rightarrow G'$ is a group homomorphism and e and e' are identities of G and G' respectively, then show that $f(e) = e'$.

यदि $f: G \rightarrow G'$ एक समूह समाकारिता है और e और e' क्रमशः G और G' के तत्समक हैं, तब दिखाइये कि $f(e) = e'$ ।

6. Define a ring and give an example of a ring.

वलय की परिभाषा दीजिये और वलय का एक उदाहरण दीजिये।

7. Find the rang of the matrix A , where

आव्यूह A की कोटि ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Show that the vectors $X = [1, 1, 1]$ and $Y = [-1, 0, 1]$ are linearly independent.

दिखाइये कि सदिश $X = [1, 1, 1]$ और $Y = [-1, 0, 1]$ रेखीय स्वतन्त्र हैं।

9. Show that the following system of equations has non-zero (non-trivial) solutions.

दिखाइये कि निम्न समीकरणों का अशून्य हल है : <http://www.upadda.com>

$$x + y - 6z = 0$$

$$-3x + y + 2z = 0$$

$$x - y + 2z = 0$$

10. Find the characteristic roots of the matrix A , where :

यदि A के अभिलाक्षणिक मूलों को ज्ञात कीजिये जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

11. If $\sin(A + iB) = x + iy$, then prove that :

यदि $\sin(A + iB) = x + iy$, तब सिद्ध कीजिये कि :

$$\frac{y^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1$$

12 Show that :

दिखाइये :

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

खण्ड—स (Section—C)

1. State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रान्ज की प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिये।

2. Define group isomorphism and prove that the relation of isomorphism of groups in the set of all groups is an equivalence relation.

समूह तुल्याकारिता परिभाषित कीजिये और सिद्ध कीजिये कि सभी समूहों के समुच्चय में तुल्याकारिता का सम्बन्ध, तुल्यता सम्बन्ध होता है।

3. State Cayley-Hamilton theorem and using the theorem find the inverse A^{-1} of the matrix A , where

कैली-हैमिल्टन प्रमेय लिखिए और इसका प्रयोग करते हुए आव्यूह A का प्रतिलोम A^{-1} ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Find the sum of the following series :

निम्नांकित श्रेणी का योग ज्ञात कीजिये :

$$1 + \cos \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \cos 2\theta + \cos^3 \theta \cos 3\theta + \dots$$

http://www.upadda.com

Whatsapp @ 9300930012

Your old paper & get 10/-

पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से