

## **B.Sc. I – Mathematics (First Paper), 2004**

### **(Algebra, Matrices and Trigonometry)**

**Note :** Attempt all Sections. (i) All questions of Section A are compulsory.  
(ii) Attempt any eight questions from Section B and two questions from Section C.

### **खण्ड—अ (Section – A)**

1. The identify element of the multiplicative group  $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  is :

मल्टीप्लिकेटिम समूह  $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  का तत्समक है :



2. If  $a$  is an element of a group  $(G, \circ)$  such that  $a \circ a = e$ , then  $a^{-1} = \dots$ :

यदि  $a$  एक समूह  $(G, o)$  का ऐसा अवयव है कि  $a \circ a = e$ , तब  $a^{-1} = \dots :$



3. If  $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  is a group homomorphism such that  $f(2) = 3$ , then  $f(-2) = \dots$ :

यदि  $f: (Z, +) \rightarrow (Z, +)$  एक ऐसी समूह समाकारिता है कि  $f(2) = 3$ , तब  $f(-2) = \dots$ ;



4. If  $H$  is a subgroup of a group  $G$  such that  $O(G) = n$  and  $O(H) = m$ , then .

यदि  $H$  समूह  $G$  का ऐसा उपसमूह है कि  $O(G) = n$  और  $O(H) = m$ , तब :

- (अ)  $m/n$       (ब)  $n/m$       (स)  $m > n$       (ट)  $m = n$

5. If  $a$  and  $b$  are elements of a group  $(G; \circ)$ , then  $(a \circ b)^{-1} = \dots$

यदि  $a$  और  $b$  एक समूह  $(G, \circ)$  के अवयव हैं, तब  $(a \circ b)^{-1} = \dots$ :

- (अ)  $a o b$       (ब)  $g^{-1} o b^{-1}$       (स)  $b o g$       (द)  $b^{-1} o a^{-1}$

6. A subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be normal if  $\forall g \in G$  and  $h \in H$ ,

किसी समूह  $G$  का उपसमूह  $H$  प्रसामान्य कहलाता है यदि  $\forall g \in G$  और  $h \in H$  :

- (अ)  $ghg^{-1} \in H$       (ब)  $ghg^{-1} \in L^*$       (स)  $g^{-1}hg^{-1} \in H$       (द)  $gh^{-1}g \in H$

7. A square matrix  $A = [a_{ij}]$  is called a symmetric matrix if  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

एक वर्ग आव्यूह  $A = [a_{ij}]$  सममित आव्यूह कहलाता है। यदि  $\forall i, j :$

- (अ)  $a_{ii} = a_{ii}$       (ब)  $a_{ii} = -a_{ii}$       (स)  $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$       (द)  $a_{ii} = -\bar{a}_{ii}$

8. What is the rank of the matrix  $A$ , where :

आव्यूह  $A$  की कोटि क्या होगी, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (अ) 1

- (अ) 2

- (स) 3

- (C) 4

9. Relation  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  was given by :

सम्बन्ध  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  प्रतिपादित किया गया था, द्वारा :

- (अ) न्यूटन      (ब) युलर      (स) डि-मावियर      (द) कोशी

10.  $\log i = :$

- (अ)  $i$       (ब)  $\frac{1}{2}\pi i$       (स)  $\pi i$       (द)  $2\pi i$

## **खण्ड—ब (Section -- B)**

1. Show that the fourth roots of unity  $\{1, i, -1, -i\}$  form an abelian group with respect to multiplication.

दिखाये कि इकाई के चतुर्थ मूल  $\{1, i, -1, -i\}$  गणा के परिप्रेक्ष्य में एक आवेली समूह बनाते हैं।

2. Define order of an element of a group. Find the order of each element of the multiplicative group  $\{1, \omega, \omega^2\}$ , where  $\omega^3 = 1$ .

समूह के एक अवयव की ओटि परिभाषित कीजिए। मल्टीप्लिकेटिव समूह  $\{1, \omega, \omega^2\}$ , जहाँ  $\omega$  है के प्रत्येक अवयव  $\omega^n$  कोटि ज्ञात कीजिये।

3. Show that the intersection of two subgroups of a group is a subgroup of the group.

दिखाइये कि किसी समूह दे, दो उपसमूहों का सर्वश्रेष्ठ उस समूह का उपसमूह होता है।

4. Show that if  $a$  is a generator of a cyclic group  $G$ , then  $a^{-1}$  is also a generator of  $G$ .

दिखाइये कि यदि  $a$  किसी चक्रीय समूह  $G$  का जनक है, तब  $a^{-1}$  भी  $G$  का जनक होगा।

5. Show that the mapping  $f: (R, +) \rightarrow (R, +)$  defined by  $f(x) = 3x \forall x \in R$  द्वारा परिभाषित है, एक समूह समाकारिता है।

6. If  $o$  is the additive identity of a ring  $R$ ,  $(+, \cdot)$ , then prove that :

$$g \cdot \rho \equiv \rho \vee g \in R$$

7. Find the rank of the matrix A, where : <http://www.upadda.com>  
 आव्याह A की कोटि ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

8. Find the characteristic roots of the matrix A, where :

आव्यूह A के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Show that the following system of equations has no non-zero solution :  
 दिखाइये कि निम्न समीकरणों का कोई अशन्य ही नहीं है :

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x - 3y + 2z = 0$$

$$4x - 2y - z = 0$$

10. Solve the following equations by matrix method :

निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि द्वारा हल कीजिए :

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

11. Separate  $\sin(\alpha + i\beta)$  into real and imaginary parts.

$\sin(\alpha + i\beta)$  को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में अलग कीजिये।

12. Show that :

दिखाइये :

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi$$

### खण्ड—स (Section – C)

1. Show that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if :

दिखाइये कि किसी समूह  $G$  का कोई अरिक्त उपसमूच्च  $H$ , समूह  $G$  का उपसमूह तब और तभी होगा जबकि :

$$(i) a, b \in H \Rightarrow ab \in H, \text{ and } (ii) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

State and prove Cayley's theorem.

कैली की प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State Cayley : Hamilton theorem and verify it for the matrix A, Where :

कैली-हैमिल्टन प्रमेय लिखिये और समूह  $A$  के लिये इसकी पुष्टि कीजिये, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Find the sum of the following series :

निम्नांकित श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2^2} \cos 3\alpha + \dots$$

