

**B.A./B.Sc. II – MATHEMATICS (First Paper), 2007**  
**(Advanced Calculus and Tensor)**

Note : (i) Attempt all Sections.

सभी खण्डों से उत्तर दीजिए।

(ii) For B. A. – Section A, do any seven questions; Section B, do any seven questions; Section C, do any two questions.

For B. Sc. – Section A, all questions are compulsory; Section B, do any eight questions; Section C, do any two questions.

बी० ए० के लिये—खण्ड अ से कोई सात प्रश्न हल करने हैं; खण्ड ब से कोई सात प्रश्न हल करने हैं; खण्ड स से कोई दो प्रश्न हल करने हैं।

बी० एस-सी० के लिये—खण्ड अ के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं; खण्ड ब से कोई आठ प्रश्न हल करने हैं; खण्ड स से कोई दो प्रश्न हल करने हैं।

**Section A (खण्ड अ)**

**Objective Type Questions (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)**

[1 × 7 = 7/1 × 10 = 10]

1. If  $f(-x) = f(x)$ , then  $f(x)$  is :

यदि  $f(-x) = f(x)$ , तब  $f(x)$  है :

- (a) even सम (b) odd विषम  
(c) continuous सांतत्य (d) None of these इनमें से कोई नहीं

2. Is  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , for  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  at  $x = 0$  is continuous ?

क्या  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , के लिए  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  पर  $x = 0$  सांतत्य है ?

- (a) No नहीं  
(b) Yes हाँ

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dots\dots\dots$

सीमा  $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dots\dots\dots$

- (a)  $\frac{1}{2}$  (b)  $\frac{1}{3}$  (c)  $\frac{3}{2}$  (d)  $\frac{2}{3}$

4. The quantity  $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$  is known as :

मात्रा  $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$  जानी जाती है :

- (a) Constant value नियत मान (b) Tensor टेन्सर  
(c) Kronecker delta क्रोनेकर डेल्टा (d) Not define परिभाषित नहीं

5. The value of  $\delta_i^i \delta_j^j$  is :

$\delta_i^i \delta_j^j$  का मान है :

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) n

6. If  $\delta_j^i$  is an invariant ?

क्या  $\delta_j^i$  एक इनवेरिएण्ट है ?

(a) Yes हाँ (b) No नहीं

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\operatorname{cosec} x)^{1/\log x} = \dots\dots\dots$

सीमा  $(\operatorname{cosec} x)^{1/\log x} = \dots\dots\dots$   
 $x \rightarrow 1$

(a)  $\infty$  (b) 0 (c)  $e$  (d)  $\frac{1}{e}$

8. Is the series  $\tan^{-1} \frac{1}{x}$  divergent ?

क्या श्रेणी  $\tan^{-1} \frac{1}{x}$  में अपसारी है ?

(a) Yes हाँ (b) No नहीं

9.  $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$  is equal to :.

$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$  बराबर है :

(a) 4! (b) 5!  
(c) 3! (d) 7!

10. Is the function  $f(x) = \sin x$  in  $[0, \pi]$  satisfy the Rolle's theorem ?

क्या फलन  $f(x) = \sin x$  में  $[0, \pi]$  रोली प्रमेय को संतुष्ट करता है ?

(a) Yes हाँ (b) No नहीं

**Section B (खण्ड ब)**

**Short Answer Questions (लघु उत्तरीय प्रश्न)**

$[2 \times 7 = 14 \quad 2\frac{1}{2} \times 8 = 20]$

11. Show that the function  $f$  given by  $f(x) = x \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right)$  for  $x \neq 0$  and  $f(0) = 0$  is continuous but not differentiable at  $x = 0$ .

दिखाइये कि फलन  $f$  जबकि  $f(x) = x \tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right)$ ,  $x \neq 0$  तथा  $f(0) = 0$  अवकलनीय नहीं है।

12. Expand  $\sin x$  in powers of  $(x - \pi/2)$  with the help of Taylor's theorem.

टेल्सर प्रमेय की सहायता से  $\sin x$  को  $(x - \pi/2)$  की घात में विस्तारित कीजिए।

13. Show that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = 0$$

दिखाइये सीमा :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = 0$$

14. Find the envelope of the family of parabolas  $y^2 = m^2(x - m)$ ,  $m$  being the parameter.

$y^2 = m^2(x - m)$  परवलय समुदाय का अन्वालोप ज्ञात करो जबकि  $m$  कोई प्राचल है।

15. Define uniform continuity and give an example.

एकसमान संततता को परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए।

16. Prove that the series  $\sum \frac{1}{4^n}$  converges to  $\frac{1}{3}$ .

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी  $\sum \frac{1}{4^n}$  अभिसारित होती है  $\frac{1}{3}$  को।

17. Evaluate :

ज्ञात करो :

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

18. Prove that  $\delta_j^i A^{jk} = A^{ik}$ .

सिद्ध कीजिए  $\delta_j^i A^{jk} = A^{ik}$ .

19. Write the laws of transformation of the tensor  $C_{jk}^i$ .

टेन्सर  $C_{jk}^i$  के लिए ट्रांसफार्मेशन का नियम लिखिए।

20. Define the inner product of two tensors.

दो टेन्सर का अन्तःगुणक परिभाषित करो।

21. Transform the equation :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0.$$

by putting  $z = e^x$

$z = e^x$  रखने पर निम्न समीकरण को परिवर्तित कीजिए :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0.$$

22. Show that  $f(x) = x^3 - 3x$  is continuous for all  $x$ .

दिखाइये कि प्रत्येक  $x$  के लिए फलन  $f(x) = x^3 - 3x$  सांतत्य है।

### Section C (खण्ड स)

#### Long Answer Questions (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

[6 × 2 = 12/10 × 2 = 20]

23. If  $u = x^2 + y^2 + z^2$ , where :

http://www.upadda.com

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1,$$

find the maximum or minimum values of  $u$ .

$u$  के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात करो  $u = x^2 + y^2 + z^2$  जबकि :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1.$$

24. Show that the series  $\sum u_n$  of positive terms is convergent or divergent according as :

$$\text{Lim} \left\{ n \log \frac{u_n}{u_n + 1} \right\} > 1 \text{ or } < 1.$$

दिखाइये कि घनात्मक पदों की श्रेणी  $\sum u_n$  अभिसारी अथवा अपसारी निम्न के अनुसार होगी :

$$\text{सीमा} \left\{ n \log \frac{u_n}{u_n + 1} \right\} > 1 \text{ या } < 1.$$

25. Show that the quantity  $A(i, j, k)$  is a tensor if its inner product with an arbitrary tensor  $B_k^{ij}$  is a tensor.

दिखाइये कि मात्रा  $A(i, j, k)$  एक टेन्सर है यदि इसका एक यादृच्छिक टेन्सर  $B_k^{ij}$  के साथ अन्तःगुणक एक टेन्सर है।

26. Change the order of integration in the following :

निम्न में समाकलन का क्रम बदलिए :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy.$$