

**B.A./B.Sc. II – MATHEMATICS (First Paper), 2005**  
**(Advanced Calculus and Tensor)**

Note : (i) Attempt questions in all sections. सभी खण्डों से उत्तर दीजिए।

(ii) For B.A. – Section A, do any seven questions; Section B, do any seven questions, Section C, do any two questions.

बी० ए० के लिये—खण्ड अ से कोई सात प्रश्न हल करने हैं, खण्ड ब से कोई सात प्रश्न हल करने हैं; खण्ड स से कोई दो प्रश्न हल करने हैं।

For B.Sc. – Section A, all questions and compulsory; Section B, do any eight questions; Section C, do any two questions.

बी० एस०-सी० के लिये—खण्ड अ के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं; खण्ड ब से कोई आठ प्रश्न हल करने हैं; खण्ड स से कोई दो प्रश्न हल करने हैं।

**Section A (खण्ड अ)**

**Objective Type Questions (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)**

$$1 \times 7 = 7/1 \times 10 = 10$$

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  is equal to :

सीमा  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  बराबर है :

- (a)  $n^x$  (b)  $e^n$  (c)  $e^x$  (d)  $ne^{-x}$

2. The infinite series  $\frac{14}{1^3} + \frac{24}{2^3} + \frac{34}{3^3} + \dots + \frac{10n+4}{n^3} + \dots$  is :

अनन्त श्रेणी  $\frac{14}{1^3} + \frac{24}{2^3} + \frac{34}{3^3} + \dots + \frac{10n+4}{n^3} + \dots$  है :

- (a) Convergent (b) Divergent  
(c) Oscillatory (d) None of these

3. The function  $f(x)$  defined on  $R$  by :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{when } x \text{ is rational} \\ -x, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is :

फलन  $f(x)$ , जो  $R$  में निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ -x, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

- (a) continuous at every point of  $R$   
(b) discontinuous at every point of  $R$   
(c) continuous only at  $x = 0$   
(d) none of these

4. The function  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

फलन  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  है :

- (a) discontinuous at  $x = 0$   
(d) continuous at  $x = 0$ , but not differentiable at  $x = 0$   
(c) continuous and differentiable at  $x = 0$   
(d) none of these

5. If  $u = \log \left( \frac{x^4 + y^4}{x + y} \right)$ , then value of  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$  is :

यदि  $u = \log \left( \frac{x^4 + y^4}{x + y} \right)$ , तो  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$  का मान है :

- (a) 0 (b) 3  
(c) 4 (d) None of these

6. The locus of the centre of curvature for a given curve is called its :  
दिये कर्व के वक्रता केन्द्र का बिन्दुपथ कहलाता है :

- (a) envelope (b) evolute  
(c) involute (d) none of these

7. Value of  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - b^x}{x} \right)$  is :

सीमा  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - b^x}{x} \right)$  का मान है :

- (a)  $a - b$  (b) 0  
(c)  $\log \frac{a}{b}$  (d) None of these

8. Value of  $\int_0^\infty \frac{x^8 (1 - x^6)}{(1 + x)^{24}} dx$  is :

$\int_0^\infty \frac{x^8 (1 - x^6)}{(1 + x)^{24}} dx$  का मान है :

- (a)  $2\beta(9, 15)$  (b)  $\beta(9, 15)$   
(c) 0 (d) None of these

9. The outer product of two tensors of kind  $(r, s)$  and  $(p, q)$  is a tensor of kind :  
दो टेन्सरोँ जो कि  $(r, s)$  व  $(p, q)$  प्रकार के हैं, का बाह्य गुणन होता है, निम्न प्रकार का टेन्सर :

- (a)  $(rp, sq)$  (b)  $(r + p, s + q)$   
(c)  $(r, q)$  (d)  $(p, s)$

10. A skew-symmetric tensor of second order has at most :

- (a)  $\frac{n(n+1)}{2}$  independent components in  $V_n$   
(b)  $\frac{n(n-1)}{2}$  independent components in  $V_n$   
(c)  $\frac{n}{2}$  independent components in  $V_n$   
(d)  $n$  independent components in  $V_n$

Short Answer Questions (लघु उत्तरीय प्रश्न)

$$2 \times 7 = 14/2 \frac{1}{2} \times 8 = 20$$

1. Test whether the series  $\frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{2}{1+2^{-2}} + \frac{3}{1+2^{-3}} + \dots$  is convergent or divergent,

श्रेणी  $\frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{2}{1+2^{-2}} + \frac{3}{1+2^{-3}} + \dots$  का अपसारी या अभिसारी के लिए परीक्षण कीजिए।

2. Show that the function  $f$  given by :

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin(1/x), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is differentiable at  $x = 0$  is  $m \geq 3$ .

दर्शाओ कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin(1/x), & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$  पर अवकलनीय है यदि  $m \geq 2$ .

3. If  $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ , find the value of  $c$ , such that  $f'(c)$  has the same value as the slope of the chord joining the points for which  $x = 0$  and  $x = 4$ .

यदि  $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ , तो  $c$  का वह मान ज्ञात करो, जिसके लिए  $f'(c)$  जीवा की प्रवणता, जो कि  $x = 0$  व  $x = 4$  को जोड़ती है, के बराबर है।

4. If  $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ , prove that :

यदि  $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ , दर्शाओ :

$$(i) x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = -V$$

$$(ii) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

5. If  $u = x \phi \left( \frac{y}{x} \right) + \psi \left( \frac{y}{x} \right)$ , prove that :

यदि  $u = x \phi \left( \frac{y}{x} \right) + \psi \left( \frac{y}{x} \right)$ , सिद्ध करो :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. If  $x + y + z = u$ ,  $y + z = uv$  and  $z = uvw$ , then prove that

यदि  $x + y + z = u$ ,  $y + z = uv$  और  $z = uvw$ , तो सिद्ध करो :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v.$$

7. Find the envelope of the straight line :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha,$$

where the parameter is  $\alpha$ .

सीधी रेखा  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ , जहाँ  $\alpha$  पैरामीटर है, का इनवैलप ज्ञात करो।

8. Find a point within a triangle such that the sum of the square of its distances from the three angular points is a minimum.

त्रिभुज के अन्दर ऐसा बिन्दु ज्ञात करो, जिसकी तीनों शीर्षों से दूरी का वर्ग अल्पतम हो।

9. Show that (दर्शाओ कि) :  $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx.$

10. Show that the Kronecker delta  $\delta^i_j$  is a mixed tensor of rank two. Also show that it is an invariant.

दिखाइए कि क्रोनेकर डेल्टा  $\delta^i_j$  दो रैंक का मिक्स्ड टेंसर है तथा यह इन्वैरिएंट है।

11. The outer product of two contravariant vectors is a contravariant tensor of second order.

दो कण्ट्रावैरिएंट वेक्टरों का बाह्य गुणन, दो आर्डर का कण्ट्रावैरिएंट टेन्सर है, दर्शाओ।

12. Prove that (दर्शाओ कि) :  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [ik, j] + [jk, i].$

### Section C (खण्ड स)

#### Long Answer Questions (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

$$6 \times 2 = 12/10 \times 2 = 20$$

1. Show that  $u \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$  will resolve into linear factors if :

दिखाओ कि  $u \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$  लीनियर फैक्टरों में विभाजित हो जाएगा, यदि :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

2. Find the triangle of maximum area that can be inscribed in a circle.

एक वृत्त के अन्दर अधिकतम क्षेत्रफल वाले त्रिभुज को ज्ञात करो।

3. Change the order of integration in :

$$\int_0^a \int_0^x \frac{f'(y) dx dy}{\sqrt{\{(a-x)(x-y)\}}}$$

and hence find its value.

$$\int_0^a \int_0^x \frac{f'(y) dx dy}{\sqrt{\{(a-x)(x-y)\}}}$$

के आर्डर ऑफ इण्टीग्रेशन को बदलकर, मान ज्ञात करो :

4. Christoffel symbols are not tensor quantities. Prove it.

क्रिस्टोफल सिंबल टेन्सर क्वाण्टिटी नहीं है। सिद्ध करो।