

B.A./B.Sc. I—MATHEMATICS (Second Paper), 2007 (Calculus)

Note : Attempt questions in all Sections.
सभी खण्डों से प्रश्न हल करने हैं।

Section A (खण्ड A)

Objective Type Questions (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

[$\frac{1}{2} \times 10 = 5/1 \times 10 = 10$]

1. यदि :

$$f(x) = \begin{cases} \tan x/\sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

तब :

- (अ) $f(x)$, x के nbd में एक बढ़ते हुए क्रम में है
- (ब) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- (स) $f(x)$, $x = 0$ पर सतत है
- (द) इनमें से कोई नहीं।

If:

$$f(x) = \begin{cases} \tan x/\sin x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

then :

- (a) $f(x)$ is monotonic increasing in the nbd

- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

- (c) $f(x)$ is continuous at $x = 0$

- (d) None of these.

2. यदि $y = \sin(ax + b)$, तब $y_n = \dots$

If $y = \sin(ax + b)$, then $y_n = \dots$

3. $\frac{e^x}{1+e^x}$ के प्रसार में, x का गुणांक है—

- (अ) 1/2
- (ब) 1/3
- (स) 1/4
- (द) 1/5.

In the expansion of $\frac{e^x}{1+e^x}$ the coefficient of x is :

- (a) 1/2
- (b) 1/3
- (c) 1/4
- (d) 1/5.

4. वक्र $r = f(\theta)$ के लिए $\cos \phi$ का मान है :

- (अ) $r \frac{d\theta}{ds}$
- (ब) $r \frac{ds}{d\theta}$
- (स) $\frac{ds}{dr}$
- (द) $\frac{dr}{ds}$

For the curve $r = f(\theta)$, the value of $\cos \phi$ is :

- (अ) $r \frac{d\theta}{ds}$
- (ब) $r \frac{ds}{d\theta}$
- (स) $\frac{ds}{dr}$
- (द) $\frac{dr}{ds}$

5. वक्र $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ की समूर्ण लम्बाई है :

- (अ) πa (ब) $2\pi a$ (स) πa^2 (द) $3\pi a$

The whole length of the curve $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ is :

- (अ) πa (ब) $2\pi a$ (स) πa^2 (द) $3\pi a$

6. वक्र $x = f(y)$ के इन्फ्लेक्शन बिन्दु पर $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ और $\frac{d^3x}{dy^3}$ बराबर नहीं है :

- (अ) 1 (ब) 0 (स) -1 (द) ± 1

At the point of inflection of the curve $x = f(y)$, $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ and $\frac{d^3x}{dy^3}$ is not equal

to :

- (अ) 1 (ब) 0 (स) -1 (द) ± 1 .

7. अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ हल हेतु, समाकलन खण्ड है :

- (अ) $e^{\int P dy}$ (ब) $e^{\int P dx}$
 (स) $e^{\int Q dy}$ (द) $e^{-\int P dx}$

To solve the differential equation $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$, the integrating factor

is :

- (अ) $e^{\int P dy}$ (ब) $e^{\int P dx}$
 (स) $e^{\int Q dy}$ (द) $e^{-\int P dx}$

8. अवकल समीकरण $m dx + N dy = 0$ एक ही प्रकार का है तथा $Mx + Ny \neq 0$ तब समाकलन खण्ड _____ है।

When $Mx + Ny \neq 0$ and the equation is homogeneous, then an integrating factor of the differential equation $Mdx + Ndy = 0$ is ;

9. $(D^2 + D - 6)y = x$ का P.I. है :

- (अ) $-\frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{6} \right)$ (ब) $\frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{6} \right)$

- (स) $\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{6} \right)$ (द) $\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{6} \right)$

P.I. of $(D^2 + D - 6)y = x$ is :

- (अ) $-\frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{6} \right)$ (ब) $\frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{6} \right)$

- (स) $\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{6} \right)$ (द) $\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{6} \right)$

10. $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$ का मान _____ है।

The value of $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$ is

Section B (खण्ड ब)

Short Answer Questions (लघु उत्तरीय प्रश्न)

[$2 \times 8 = 16/2 \frac{1}{2} \times 8 = 20$]

11. फलन $f(x)$ परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x^2/a - a & , \text{ जबकि } x < a \\ 0 & , \text{ जबकि } x = a \\ a - a^2/x & , \text{ जबकि } x > a \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x); x = a$ पर सतत है।

A function $f(x)$ is defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2/a - a & , \text{ when } x < a \\ 0 & , \text{ when } x = a \\ a - a^2/x & , \text{ when } x > a \end{cases}$$

Prove that the function $f(x)$ is continuous at $x = a$.

12. मैक्लॉरिन प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} +$$

Due to Maclaurin's theorem, prove that :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} +$$

13. यदि $y = e^{a \sin^{-1} x}$, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0.$$

If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, then prove that :

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0.$$

14. वृतजात $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ में सिद्ध कीजिए कि वक्रता त्रिज्या $\rho = 4a \cos t/2$.

In the cycloid $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ prove that the radius of curvature $\rho = 4a \cos t/2$.

15. वक्र : $(x - 2y)^2(x - y) - 4y(x - 2y) - (8x + 7y) = 0$ की अनन्तस्पर्शीयाँ ज्ञात कीजिए।

Find all asymptotes of the curve :

$$(x - 2y)^2(x - y) - 4y(x - 2y) - (8x + 7y) = 0.$$

16. हल करें :

$$x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$\text{Solve : } x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

17. वक्र तंत्र $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a}{x}$ के परस्पर सम्बन्ध चक्राकार मार्गों (विन्दुपथ) को ज्ञात करें।

Find the orthogonal trajectories of the system of curves $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a}{x}$.

18. हल करें :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2.$$

Solve :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2.$$

19. समाकलन विधि से ज्ञात करें :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

By integration, evaluate :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

20. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को दीर्घाक्ष के परिवर्तन परिक्रमण करने पर जनित आयतन ज्ञात करें।

Find the volume generated by the revolution of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the major axis.

21. सिद्ध कीजिए कि वृत्तजात $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ की, शीर्ष से बक्र के किसी बिन्दु तक, चाप की लम्बाई $\sqrt{8ay}$ है।

Prove that the length of an arc of the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ from the vertex to any point on the curve is $\sqrt{8ay}$.

Section C (खण्ड स)

Long Answer Questions (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

[6 × 2 = 12/10 × 2 = 20]

22. यदि m एक धन पूर्णांक है, तब :

$$\int x^m \sqrt{2ax - x^2} dx$$

हेतु न्यूनता सूत्र ज्ञात कीजिए, इस प्रकार :

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{2ax - x^2} dx$$

ज्ञात करें :

If m be a positive integer, find a reduction formula for :

$$\int x^m \sqrt{2ax - x^2} dx$$

hence evaluate :

$$\int_0^{2a} x^3 \sqrt{2ax - x^2} dx$$

23. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax.$$

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax.$$

24. यद्यों $y^2 = 2ax - x^2$ तथा $y^2 = ax$ के बीच का क्षेत्राल ज्ञात करें, जो x -अक्ष के ऊपर है।

Find the area above the x -axis included between the curves $y^2 = 2ax - x^2$ and $y^2 = ax$.

25. वक्र $y^2(1 - x^2) = x^2(1 + x^2)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2(1 - x^2) = x^2(1 + x^2)$.

•