B.A./B.Sc. I – MATHEMATICS (First Paper), 2007
(Algebra, Matrices & Trigonometry)

Note : Attempt questions in all Sections.
सभी खण्डों से प्रश्न हल करने हैं।

Section A (खण्ड अ)

Objective Type Questions (वस्तुनिष्ठ प्रश्न) [1 × 10 = 10]

1. A non-empty subset H of a finite group G is a subgroup of G iff $\forall$ $a_1 b \in H \Rightarrow$:
किसी फाइनाइट ग्रुप G का अरिक्त उपसमुच्चय H, उसका सबग्रुप होगा यदि $\forall a_1 b \in H \Rightarrow$:
(a) $ab^{-1} \in H$ (b) $a^{-1}b^{-1} \in H$
(c) $ab \in H$ (d) $a^{-1}b$

2. The index of A_4 in S_4 is :
A_4 का S_4 में इन्डेक्स होगा :
(a) 12 (b) 4 (c) 24 (d) 2

3. The characteristic equation of $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ is :
आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण होगा :
(a) $\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$ (b) $\lambda^2 - 3\lambda + 7 = 0$
(c) $\lambda^2 - 2\lambda + I = 0$ (d) None

4. The value of $e^{i\theta}$ is :
$e^{i\theta}$ का मान है :
(a) $\cos\theta - i\sin\theta$ (b) $\sin\theta + i\cos\theta$
(c) $\cos\theta + i\sin\theta$ (d) None

5. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ and $A^2 - KA - 5I = 0$, then value of K is :
यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 - KA - 5I = 0$, तो K का मान है :
(a) 3 (b) 7 (c) 5 (d) 10

6. A group having no proper normal subgroup is called .... group.
एक ग्रुप जिसका कोई भी प्रापर नार्मल सबग्रुप नहीं है ___ ग्रुप कहलाता है :

7. A subgroup H of a group G is called a normal subgroup of G if $\forall g \in G$ and $h \in H \Rightarrow$ ....
किसी ग्रुप G का एक सबग्रुप H, उसका नार्मल सबग्रुप कहलाता है यदि $\forall g \in G$ तथा $h \in H \Rightarrow$ ....

8. In multiplicative group $G = \{ Q_0, . \}$, the order of element 5 is ....
गुणा के सापेक्ष ग्रुप $G = \{ Q_0, . \}$ सदस्य 5 का आर्डर .... होगा।

9. The necessary and sufficient condition for a square matrix A to possess the inverse is that ....

किसी वर्गाकार आव्यूह A को व्युत्क्रम आव्यूह रखने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त यह है कि .... ।

http://www.upadda.com

10. The principal value of log (-3) is ....
log (-3) का प्रिंसिपल मान है .... ।

Section B (खण्ड ब)

Short Answer Questions (लघु उत्तरीय प्रश्न) [4 × 5 = 20]

1. Define Normalizer $N(a)$ of an element a of a group G and prove that $N(a)$ is a subgroup of G.
किसी ग्रुप G के नार्मलाइजर $N(a)$ की परिभाषा दो तथा सिद्ध करो कि $N(a)$, ग्रुप G का सबग्रुप होता है।

2. Prove that alternating group A_n of symmetric group S_n is a normal subgroup of S_n.
सिद्ध करो कि सीमिट्रक ग्रुप S_n का आल्टरनेटिव ग्रुप A_n, S_n का नार्मल सबग्रुप होता है।

3. State and prove Lagrange's theorem on groups.
लैगरान्जो की प्रमेय को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

4. Prove the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$ is cyclic group. Find its generator's.

सिद्ध करो कि गुणन के सापेक्ष ग्रुप $G = \{1, -1, i, -i\}$ चक्रीय ग्रुप होता है। इसके जनक ज्ञात कीजिए।

5. Define inverse matrix of a non-singular square matrix A. Prove that :
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
नान-सिंगुलर आव्यूह A के व्युत्क्रम आव्यूह की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

6. Apply Descarte's rule of sign to show that equation $2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ has at least four imaginary roots.
डिस्कार्टेस नियम का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ कम-से-कम चार काल्पनिक मूल रखता है।

7. If $\tan(\alpha + i\beta) = i$, where α and β are real, then prove that α is indeterminate and β is infinite.

यदि $\tan(\alpha + i\beta) = i$, जहाँ α तथा β वास्तविक हैं, तब सिद्ध कीजिए कि α इनडिटरमिनेट है तथा β अनन्त है।

8. The points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ are colinear if and only if the rank of the matrix :
$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$
is less than three. Prove it.
बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ एकरेखीय होंगे यदि और केवल यदि आव्यूह :
$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$
की रैंक तीन से कम होगी, सिद्ध कीजिए।

http://www.upadda.com

9. If $i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot \text{inf}}}}} = A + i B$, principal values only being considered, prove that :

$$A^2 + B^2 = e^{-\pi B} \text{ and } \tan \frac{\pi A}{2} = B/A$$

यदि $i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot \text{inf}}}}} = A + i B$, जबकि केवल प्रिंसिपल मान लिए गए हैं, सिद्ध करो कि :

$$A^2 + B^2 = e^{-\pi B} \text{ and } \tan \frac{\pi A}{2} = B/A$$

Section C (खण्ड स)

Long Answer Questions (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. Define kernel of homomorphism of a group G into group G' and prove hat kernel of homomorphism is a normal subgroup of G.

किसी ग्रुप G से G' मे होमोमार्फिज्म के कर्नल की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि होमोमार्फिज्म का कर्नल G का नारमल सबग्रुप होता है।

2. Define a field. Prove that the set of all residue class Modulo prime integer p, forms a finite field with respect to addition and multiplication of residue classes modulo p.

फील्ड को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि मॉडलों अविभाज्य संख्या p के सापेक्ष बने सभी रेसडिव क्लासेस का सेट माडलो p के सापेक्ष योग और गुणन क्रिया के सापेक्ष सीमित फील्ड बनाता है।

3. Sum the series :

$$1 - \cos \alpha \cos \beta + \frac{\cos^{2!} \alpha}{2!} \cos 2\beta - \frac{\cos^3 \alpha}{3!} \cos 3\beta + \ldots\ldots .$$

श्रेणी :

$$1 - \cos \alpha \cos \beta + \frac{\cos^{2!} \alpha}{2!} \cos 2\beta - \frac{\cos^3 \alpha}{31} \cos 3\beta + \ldots\ldots .$$

का योग कीजिए।

4. Find whether the equations $x - 3y - 8z + 10 = 0$, $3x + y - 4z = 0$, $2x + 5y + 6z - 13 = 0$ are consistent ? If so, solve them.

ज्ञात कीजिए कि क्या समीकरण $x - 3y - 8z + 10 = 0$, $3x + y - 4z = 0$, $2x + 5y + 6z - 13 = 0$ संगत हैं ? यदि हैं, तो इन्हें हल कीजिए।